Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче

СТУДЕНТ КРУТСКИХ В. В.

Д.Ф.-М.Н. ПРОФЕССОР ЛОБОДА А. В

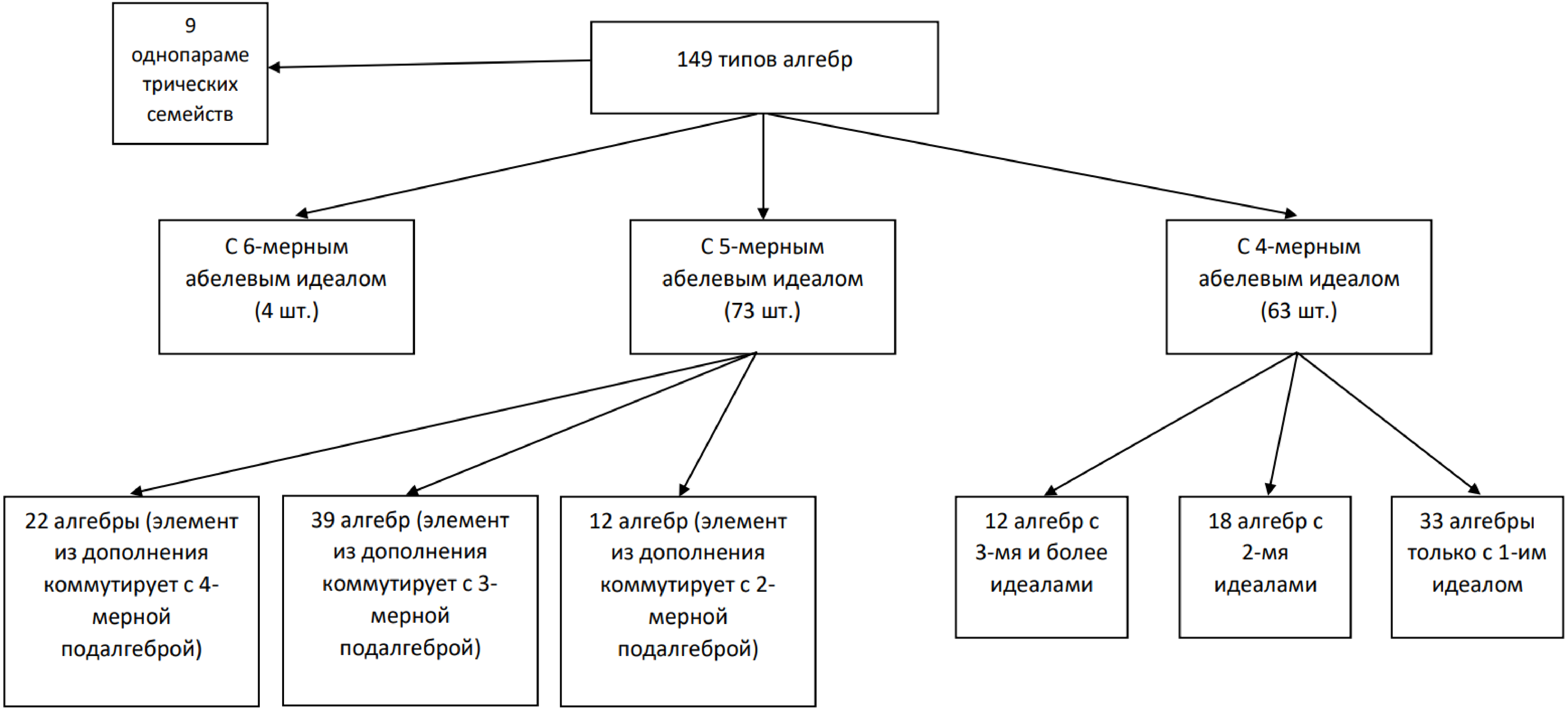
7-мерные нильпотентные алгебры Ли

В связи с задачей описания голоморфно однородных невырожденных (по Леви) вещественных гиперповерхностей в 4-мерном комплексном пространстве, разработана техника изучения голоморфных реализаций 7-мерных алгебр Ли, существенно использующая компьютерные алгоритмы и символьные вычисления.

Гонгом в [1] приведена классификация 7-мерных нильпотентных алгебр Ли (149 типов).

Основная идея реализации таких алгебр в $\mathbb{C}^4$ опирается на имеющиеся в них абелевы идеалы больших размерностей [2]. В связи с этим была разработана программа определения размерности максимальных абелевых идеалов и количества таких идеалов в изучаемых алгебрах.

На следующем слайде представлена схема разбиения всех 149 типов неразложимых 7-мерных алгебр Гонга на группы по количеству и размерности абелевых идеалов у каждой алгебры.


149 типов алгебр
9 однопараметрических семейств
С 6-мерным абелевым идеалом (4 шт.)
С 5-мерным абелевым идеалом (73 шт.)
С 4-мерным абелевым идеалом (63 шт.)
22 алгебры (элемент из дополнения коммутирует с 4-мерной подалгеброй)
39 алгебр (элемент из дополнения коммутирует с 3-мерной подалгеброй)
12 алгебр (элемент из дополнения коммутирует с 2-мерной подалгеброй)
12 алгебр с 3-мя и более идеалами
18 алгебр с 2-мя идеалами
33 алгебры только с 1-им идеалом

Алгебры Ли с 5-мерным абелевым идеалом

Один из подходов к анализу алгебр с 5-мерным абелевым идеалом - рассмотрение «взаимодействия дополнения к идеалу и самого идеала». Так, например, если хотя бы один элемент из дополнения коммутирует с 4-мерной подалгеброй идеала, то такая алгебра имеет только вырожденные орбиты [3].

Таких алгебр в списке Гонга оказалось 22.

Оставшиеся алгебры были разбиты (с помощью дополнения к упомянутой компьютерной программе) на две группы:
1. В дополнении к I_5 найдется элемент, коммутирующий с 3-мерной подалгеброй I_5 (39 штук)
2. Элемент из дополнения коммутирует лишь с 2-мерной подалгеброй идеала (12 штук)

Дальнейший разговор пойдет о первой группе алгебр.

Стандартные базисы алгебр с 5-мерным идеалом

У любой из алгебр с обозначенными выше свойствами можно ввести базис, более естественно отражающий эти свойства и отличающийся, вообще говоря, от начального базиса работы [1].

Рассмотрим сначала произвольную 7-мерную алгебру Ли, у которой в дополнении к 5-мерному абелеву идеалу I_5 имеется элемент, коммутирующий с 3-мерной подалгеброй h_3 этого идеала.

Обозначим такой элемент через E_1, а базис Гонга 3-мерной подалгебры h_3, с которой коммутирует E_1, через E_5, E_6, E_7 (при этом можно считать E_6 и E_7 элементами центра исходной алгебры). Отметим, что E_6 и E_7 можно переставлять, так же, как и элементы E_3 и E_4, входящие в 5-мерный идеал, но не в подалгебру h_3. При работе с начальными базисами Гонга второй элемент из дополнения к I_5 (однозначно определяемый введенными договоренностями) обозначим через E_2.

Три случая базиса идеала

В работе [2] обсуждались алгебры с 4-мерными абелевыми подалгебрами. В ней же была сформулирована лемма.

Лемма 1. Пусть вещественная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ невырождена по Леви вблизи некоторой своей точки Q и является орбитой 7-мерной алгебры Ли g голоморфных векторных полей в этом пространстве. Пусть еще I_4 - 4-мерная абелева подалгебра в g с фиксированным базисом e_4, e_5, e_6, e_7. Голоморфной заменой координат пространства $\mathbb{C}^4$ (определенной вблизи точки Q) этот базис можно привести к одному из трех видов

e_4: $(1, 0, 0, 0)$	e_4: $(0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1))$	e_4: $(0, 1, 0, 0)$
e_5: $(0, 1, 0, 0)$	e_5: $(0, 1, 0, 0)$	e_5: $(0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1))$
e_6: $(0, 0, 1, 0)$	e_6: $(0, 0, 1, 0)$	e_6: $(0, 0, 1, 0)$
e_7: $(0, 0, 0, 1)$	e_7: $(0, 0, 0, 1)$	e_7: $(0, 0, 0, 1)$

Применение леммы для случая алгебр с 5-мерными идеалами

Фиксируя 4-мерную подалгебру в 5-мерном абелевом идеале, получим две леммы

Лемма 2. Пусть $M \subset \mathbb{C}^4$ – невырожденная по Леви гиперповерхность, на которой имеется 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей с 5-мерной абелевой подалгеброй I_5. Тогда первый из трех случаев Леммы 1 невозможен ни для какой четверки независимых полей из I_5.

Лемма 3. Если в дополнении к 5-мерному идеалу имеется элемент, коммутирующий (хотя бы) с двумя независимыми полями из идеала, то реализация 3-го случая Леммы 1 (с выпрямлением именно этих двух полей и любого третьего поля из идеала) не может иметь невырожденных орбит.

В таком случае нам необходимо рассмотреть только второй случай.

Базисные поля идеала для второго случая Леммы 1 имеют вид

$$E_3: (0, b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1))$$

$$E_4: (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1))$$

$$E_5: (0, 1, 0, 0)$$

$$E_6: (0, 0, 1, 0)$$

$$E_7: (0, 0, 0, 1)$$

Из-за наличия в исходной алгебре 5-мерного идеала легко упростить поле E_1, коммутирующее с 3-мерной подалгеброй идеала, до вида E_1: (1, 0, 0, 0).

Стандартные базисы алгебр Ли

Очередное дополнение к компьютерной программе позволило получить из начальных коммутационных соотношений следующую таблицу умножения:

Начальный базис

	$[e_1;e_2]$	$[e_1;e_3]$	$[e_1;e_4]$	$[e_1;e_5]$	$[e_1;e_6]$	$[e_2;e_3]$	$[e_2;e_4]$	$[e_2;e_5]$	$[e_3;e_5]$	$[e_4;e_6]$
$1357I$	e_3		e_6			e_5		e_7		e_7
$13457B$	e_3	e_4	e_5	e_7		e_7				e_7
$13457F$	e_3	e_4	e_5	e_7		e_6				e_7
$12457A$	e_3	e_4	e_6		e_7			e_6	e_7	
$12457B$	e_3	e_4	e_6		e_7			e_6+e_7	e_7	
$123457D$	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_6	e_7			
$123457E$	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_6+e_7	e_7			

Измененный базис

	$[E_1;E_2]$	$[E_1;E_3]$	$[E_1;E_4]$	$[E_2;E_3]$	$[E_2;E_4]$	$[E_2;E_5]$	$[E_2;E_6]$
$1357I$		$-E_4$	E_7	$-E_5$		E_6	E_7
$13457B$	$-E_3$	E_7	E_7	E_5		E_6	E_7
$13457F$	$-E_3$	E_4	E_7	E_5		E_6	E_7
$12457A$		$-E_6$	$-E_7$	E_4	E_5	E_6	E_7
$12457B$		$-E_6-E_7$	$-E_7$	E_4	E_5	E_6	E_7
$123457D$	$-E_3$	E_6	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
$123457E$	$-E_3$	E_6+E_7	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7

Интегрирование алгебр Ли

Из 39 изучаемых алгебр были выделены две группы из 20 и 7 алгебр соответственно с однотипными таблицами умножения в каждой группе. Анализ этих двух групп и еще 9 индивидуальных алгебр подтвердил выполнение для них простейших достаточных условий вырождения всех их орбит.

Лишь 7 алгебр из 39 таким простейшим условиям НЕ удовлетворяют и потенциально допускают невырожденные орбиты. Это алгебры *137A*, *137C*, *1357G*, *1357O*, $247P_1$, $1357Q_1$.

Для выяснения ситуации эти 7 алгебр Ли проинтегрированы (с помощью компьютерных алгоритмов [4]). Так, каждый элемент базиса $e_1, \ldots, e_7$ любой обсуждаемой алгебры Ли g представляется голоморфным векторным полем

$$e_k = a_k(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + b_k(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + c_k(z)\frac{\partial}{\partial z_3} + d_k(z)\frac{\partial}{\partial z_4}, \quad (k = \overline{1,7})$$

Для удобства используется сокращенная запись $e_k : (a_k, b_k, c_k, d_k)$.

Алгебра *137A*

Например, базисные векторные поля алгебры 137A имеют вид

$$e_1 : (1,0,0,0); \quad e_2 : (A_2, B_2, -z_2 + C_2, -z_3 + D_2);$$

$$e_3 : (0, A_2^2, -A_2 D_4 - A_2 z_1, \frac{1}{2} z_1^2 + D_4 z_1 + D_3);$$

$$e_4 : (0,0,-A_2, z_1 + D_4); \qquad e_5 : (0,1,0,0);$$

$$e_6 : (0,0,1,0); \qquad e_7 : (0,0,0,1);$$

Вещественная гиперповерхность *M={Φ=0}* является орбитой (интегральной поверхностью) голоморфной реализации алгебры Ли *g*, если для каждого базисного поля этой алгебры выполняется условие касания *M* в виде

$$\Re e\{e_k(\Phi)|_M\} = 0 \; .$$

Решение этой системы (как и систем для шести остальных алгебр) приводит к вырожденным поверхностям.

Заключение

Реализованные с использованием пакета Maple алгоритмы позволили найти все (максимальные по размерности) абелевы идеалы и подалгебры всех 149 нильпотентных 7-мерных алгебр Ли. С помощью разработанных программ исследованы 7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ у всех 73 алгебр Ли (из обсуждаемых 149), имеющих 5-мерный абелев идеал. Любая из таких орбит может быть только вырожденной (по Леви) гиперповерхностью в $\mathbb{C}^4$.

Планируется регистрация комплекса разработанных программ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 20-01-00497).

Список литературы

1. Gong, M.-P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and R) / M.-P. Gong – University of Waterloo, 1998. – 165 с.
2. Лобода, А. В. On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space / А. В. Лобода, Р. С. Акопян, В. В. Крутских // Журнал СФУ, Математика и физика. – 2020. – № 3, С. 360- 372.
3. Лобода, А. В. О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей четырехмерных комплексных пространств / А.В. Лобода // Тр. МИАН. – 311 (2020). – С. 194–212.
4. Крутских, В. В. Интегрирование 7-мерных алгебр Ли с использованием символьных вычислений / В. В. Крутских, А. В. Лобода // Материалы XX международной научно-методической конференции “Информатика: проблемы, методология, технологии”. – Воронеж. – 2020. – С. 579-586.
5. Дьяконов, В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании/ В. П. Дьяконов – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720с.

Спасибо за внимание!